



Региональная интернет-олимпиада по математике 2018 г.

Задания заочной региональной олимпиады по математике 2018 года

1. Разность $\sqrt{|40\sqrt{2} - 57|} - \sqrt{|40\sqrt{2} + 57|}$ является целым числом. Найдите это число.

2. Докажите тождество

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} \right) = \operatorname{tg} 2\alpha$$

3. Решите уравнение, в котором x – натуральное число:

$$\frac{x-1}{x^2} + \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-3}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^2} = \frac{7}{15}.$$

4. Найти решение уравнения

$$\log_2(1+x^2) = \log_2 x + 2x - x^2.$$

5. В библиотеке имеются книги на английском, французском и немецком языках. Английские книги составляют 36% всех книг на иностранных языках, французские – 75% английских, а остальные 185 книг – немецкие. Сколько книг на иностранных языках в библиотеке?

6. Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на три секунды быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

7. Найти все значения a , при которых уравнение

$$|3x - 3| + 2 = ax$$

имеет ровно два решения.

8. Построить график функции

$$y = \frac{|\sin x|}{\sin x} + \frac{x}{|x|}.$$

9. Найти решение неравенства $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$.

10. Найти наименьший целый корень уравнения

$$|x-3| + 2 \cdot |x+1| = 4.$$

11. Найти решение системы уравнений
$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

12. Решить уравнение

$$2 \cdot 4^{\sin x} = 9 \cdot 2^{\sin x} - 4.$$

13. Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 м, а каждый следующий час поднимался на высоту на 25 м меньшую, чем в предыдущий. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 м?

14. При каких значениях параметра a уравнение

$$x^3 + \frac{48}{x} = a$$

имеет хотя бы одно решение?

15. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Диаметр круга совпадает с большим катетом. Вычислить площади частей круга, на которые он разбивается гипотенузой треугольника.

16. Высота правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а боковая грань образует с плоскостью основания угол 60° . Найти объем пирамиды.